EIGENDECOMPOSITION & SVD

- ∀ n×n matice lze rozložit na součin několika matic
- speciální případ → dekompozice na vlastní .... (eigendecomposition)

$$A = Q \Lambda Q'$$

Q' ortonormální ($QQ' = Q'Q = I$)

Λ diagonální

$\Rightarrow AQ = Q\Lambda \xrightarrow{\text{diagonální}} AQ_i = \lambda_i Q_i \quad (i = 1, \dots, n)$

$$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} | & | \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Q_i vlastní vektor, eigenvector

λ_i vlastní číslo, eigenvalue

- vlastní čísla se typicky řadí do sestupné posl. : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

$$A = \begin{bmatrix} 23 & 36 \\ 36 & 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} Q_1 & Q_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} = Q \Lambda Q^{-1}$$

- Na dekompozici na vlastní čísla lze nahlížet i jako na spektrální dekompozici

$Q\Lambda Q' = (Q\Lambda)Q' \Rightarrow$ násobení řádkový vektorů a sloupcového vektoru tvořeného řádky Q'

$$\Rightarrow A = [\lambda_1 Q_1 \ \lambda_2 Q_2 \ \dots \ \lambda_n Q_n] \begin{bmatrix} Q_1' \\ \vdots \\ Q_n' \end{bmatrix} = \underbrace{\lambda_1 Q_1 Q_1' + \lambda_2 Q_2 Q_2' + \dots + \lambda_n Q_n Q_n'}$$

- Vlastnosti dekompozice

(1) Ne ∀ n×n matice v $\mathbb{R}$ lze dekomponovat na vlastní čísla $\mathbb{R}$

$$AQ = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

(2) lze dokázat (Searle, 1982), že když je A sym. eigen č. a vektory jsou vždy v $\mathbb{R}$

(3) vl. vektory nejsou unikátní

$\rightarrow AQ_i = \lambda_i Q_i \Rightarrow A(-1)Q_i = \lambda_i(-1)Q_i \rightarrow$ reflexe

$\rightarrow \Lambda$ lze nahradit $\underset{\Lambda^*}{K\Lambda}$ $(K = k \cdot I) = K^{\frac{1}{2}} \Lambda K^{\frac{1}{2}} \Rightarrow Q^* \rightarrow Q \cdot K^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & \ddots 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow Q^* \Lambda^* Q^{*\prime}$ je jiná dekompozice

(4) $\# \lambda_i \neq 0 = \text{rank } A$

5, ? spektrální dekompozice = norma (Frobeniova) matice ⇒
norma

každá z "komponent" matic dekompozice přispívá (vysvětluje) do normy původní matice

$A = \begin{bmatrix} 23 & 36 \\ 36 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \|A\|_F = 23^2+36^2+36^2+2^2 = 3125$

$A = \lambda_1 Q_1 Q_1' + \dots + \lambda_n Q_n Q_n' - \|A\| = \|\lambda_1 Q_1 Q_1' + \dots + \lambda_n Q_n Q_n'\| =$

$= \|\lambda_1 Q_1 Q_1'\| + \dots + \|\lambda_n Q_n Q_n'\| = \lambda_1 \|\underbrace{Q_1 Q_1'}_{1}\| + \dots + \lambda_n \|Q_n Q_n'\|$

$= \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ $\quad 1 \leftarrow QQ' = I$

$\Rightarrow \|A\| = 50^2 + 25^2 = 3125$

1. komponenta přispívá $\frac{50^2}{50^2+25^2} = 0.8 = 80\%$

2. — " — $\frac{25^2}{50^2+25^2} = 0.2$

→ 6, Eigen dekompozice může být také chápána jako způsob, jak nejlépe aproximovat matici A řádu n maticí nižšího řádu k. Nejlepší aproximace je $\lambda_1 Q_1 Q_1' + \dots + \lambda_k Q_k Q_k'$

singulární rozklad matice

$\boxed{SVD}$ = Eckart-Young theorem

$Q'Q = P'P = I$ ortonormální

pravé singulární vektory $m \times m$

∀ $n \times m$ matice A lze rozložit na $A = P \Phi Q'$

levé singulární vektory $n \times m$

singulární hodnoty $m \times m$

· výpočet: předpokládejme, že známe SVD A:

$A'A = Q \Phi P' P \Phi Q = Q \Phi^2 Q$

rozklad matice $A'A$ na vlastní čísla

↳ výpočtem vlastních čísel $A'A$ dostaneme Q a Φ. Zbývá P

$A = P \Phi Q'$

$AQ = P \Phi Q' Q$ ortonormální

$AQ \Phi^{-1} = P$ diagonální → existuje inverze

→

· příklad SVD

$$X=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow X'X=\begin{bmatrix}14 & 5\\ 5 & 5\end{bmatrix}=Q\Phi^2Q'=$$

$$=\begin{bmatrix}0.91 & -0.41\\ 0.41 & 0.91\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16.03 & 0.00\\ 0.00 & 2.77\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.91 & 0.41\\ -0.41 & 0.91\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi_1=4.03,\ \phi_2=1.67$$

$$P=XQ\Phi^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.91 & -0.41\\ 0.41 & 0.91\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4.03^{-1} & 0\\ 0 & 1.67^{-1}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0.43 & 0.85\\ 0.78 & -0.19\\ 0.45 & -0.49\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{SVD}:\ X=P\Phi Q'=\begin{bmatrix}0.43 & 0.85\\ 0.78 & -0.19\\ 0.45 & -0.49\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4.03 & 0\\ 0 & 1.67\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.91 & 0.41\\ -0.41 & 0.91\end{bmatrix}$$

- Vlastnosti:

1, Když jsou $\forall$ sing. hodnoty různé (typicky s reálnými daty) pak jsou sing. vektory v P, Q unikátní (až na reflexi)

2, Jestli A symetrická, pak je SVD = eigendekompozice ($A=T\Phi T'$)

$$A=A' \Rightarrow P\Phi Q'=Q\Phi P'$$
$$Q'P\Phi Q'P=Q'Q\Phi P'P$$
$$Q'P\Phi Q'P=\Phi \Rightarrow Q'P=I$$

3, Podobně jako spektrální dekompozice, vede SVD na optimální least-square aproximaci původní matice maticí nižšího řádu

$\Rightarrow$ pro $\text{rank}(A)=r\geq k \Rightarrow$ opt. aproximaci dostaneme zachováním prvních k singulárních hodnot $\Rightarrow A$ je aproximována pomocí $\phi_1 p_1 q_1' + \dots + \phi_k p_k q_k'$, kde p_i, q_i jsou i-té sloupcové vektory P a Q